



Polskie Towarzystwo Medycyny Nuklearnej

MINIMUM WIEDZY O STATYSTYCE

dr n. tech. Adam Bajera
Członek honorowy PTMN



TREŚĆ

CZYM JEST STATYSTYKA?

MINIMUM WIEDZY O STATYSTYCE

Zmienna losowa – Rozkład zmiennej losowej

ŁĄCZENIE ZMIENNYCH LOSOWYCH

Wartość oczekiwana – Wariancja

ŁĄCZENIE ZMIENNYCH LOSOWYCH

**Zmienna niezależna i zależna – Przekształcenia
zmiennych losowych**



Wstęp

Medycyna nuklearna wykorzystuje rozpad promieniotwórczy, który jest zjawiskiem losowym. STATYSTYKA jest jedyną metodą liczbowej oceny:

- **procesów tworzenia danych, czyli rejestracji,**
- **wartości liczbowych parametrów technicznych rejestracji,**
- **oceny parametrów liczbowych badanych procesów fizjologicznych,**
- **procesów i sposobów kontroli technicznej używanych urządzeń.**



MINIMUM WIEDZY O STATYSTYCE

CZYM JEST STATYSTYKA?



Czym jest statystyka?

W znaczeniu ogólnym statystyka jest dyscypliną nauk ilościowych, zajmującą się zarówno metodami liczbowego opisu (ujęcie deterministyczne), jak i metodami liczbowego wnioskowania w warunkach niepewności (ujęcie stochastyczne). Stosowana jest do opisu zjawisk masowych.

Metody te są traktowane integralnie. Stąd też celem ich stosowania jest nie tylko przeprowadzania rzetelnych i kompleksowych diagnoz: jak jest i dlaczego tak jest?, ale także możliwości wysoce prawdopodobnej predykcji statystycznej – jak na podstawie prób losowych odtwarzać liczbowo nieznaną rzeczywistość? Analiza statystyczna jest zatem jednocześnie diagnostyką i predykcją !!!



Czym jest statystyka?

Współcześnie teoretyczną i techniczną bazą statystyki jest teoria rachunku prawdopodobieństwa skierowana na procedury przetwarzania masowych danych liczbowych. Wyjaśnia mechanizmy i statystyczne prawidłowości występujących w badanych zjawiskach i procesach.

Mówiąc o statystyce należy pamiętać o bardzo ważnym fakcie:

**W STATYSTYCE DANymi sĄ WYŁĄCZNIe LICZBY.
STATYSTYKA ODRZUCA ZNACZENIE ZJAWISK
I PROCESÓW. JEST NARZĘDZIEM, KTÓRE BADA
WYŁĄCZNIe WŁAŚCIWOŚCI GRUPY LICZB !!!**



TEMAT GŁÓWNY

MINIMUM WIEDZY O STATYSTYCE



Zmienna losowa

Losowość – brak celu, przyczyny, porządku lub przewidywalnego zachowania. Losowy proces to proces, którego wyniki nie dają się dokładnie przewidzieć, a jedynie można opisać rozkład prawdopodobieństwa różnych wyników.

Oznacza to, że powtarzanie tego samego doświadczenia w całkowicie identycznych warunkach może dać za każdym razem inny wynik. Przykładowo, badając pojedynczy niestabilny atom, nie jesteśmy w stanie przewidzieć, w którym momencie dojdzie do jego rozpadu, a jedynie możemy określić prawdopodobieństwo tego rozpadu w jakimś czasie.



Rozkład zmiennej losowej

W statystyce używa się dwóch elementarnych pojęć: zmienna losowa i rozkład zmiennej losowej.

Zmienna losowa jest funkcją przypisującą każdemu zdarzeniu elementarnemu wartość liczbową. Wartości te są uzyskiwane w wyniku doświadczenia losowego, którym może być samo wystąpieniem zdarzenia lub wartością wyniku pomiaru.

Rozkład zmiennej losowej należy rozumieć jako rozkład prawdopodobieństwa, czyli miary wyznaczonej przez zmienną losową, w zbiorze jej możliwych wartości.

W literaturze przedmiotu przyjęto oznaczać zmienną losową dużą literą, np. X . Wartości, które przyjmuje oznacza się odpowiednimi, małymi literami, czyli $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$.

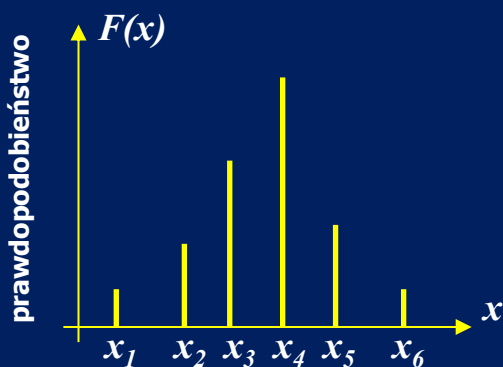


Rozkład zmiennej losowej

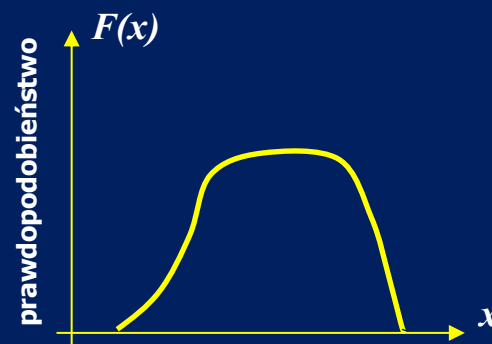
Zmienna losowa może być skokowa (dyskretna) lub ciągła.

Zmienna losowa skokowa (dyskretna) przyjmuje wartości ze skończonego bądź przeliczalnego zbioru wartości x_1, x_2, \dots, x_n .

Zmienna losowa ciągła jest nieujemną funkcją $F(x)$ zwaną gęstością prawdopodobieństwa.



Zmienna losowa skokowa



Zmienna losowa ciągła



LICZBOWE MIARY ZMIENNOŚCI



Liczbowe miary zmienności

Miary zmienności dostarczają informacji jak bardzo zróżnicowana jest populacja pod względem badanej cechy X .

Dokładniejszego omówienia wymagają opisy takich miar zmienności jak:

- **wartość oczekiwana oznaczana symbolem $E[X]$,**
- **wariancja oznaczana symbolem $V[X]$,**
- **działania na zmiennych losowych.**

oraz inne związane z nimi miary pochodne.



LICZBOWE MIARY ZMIENNOŚCI

Wartość oczekiwana



Wartość oczekiwana $E[X]$

Wartość oczekiwana – w uproszczeniu najważniejsza charakterystyka liczbowa zmiennej losowej. Używane są także tożsame pojęcia: wartość średnia, wartość przeciętna.

Dla skokowej zmiennej losowej X , przyjmującej wartości x_1, x_2, \dots, x_k z prawdopodobieństwami, odpowiednio, p_1, p_2, \dots, p_k jest to:

$$E[X] = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k$$

Dla ciągłej zmiennej losowej X przyjmującej nieskończenie wiele różnych wartości, mającej rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $p(x)$, wartością oczekiwaną jest liczba:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) dx$$



LICZBOWE MIARY ZMIENNOŚCI

Wariancja



Wariancja $V[X]$

Wariancją zmiennej losowej – zarówno skokowej jak i ciągłej – nazywa się nazywa się liczbę:

$$V[X] = E[X - E[X]]^2$$

gdzie $E[X]$ jest oczekiwaną wartością zmiennej losowej X .

W praktyce rzadko używa się miary jaką jest wariancja. W jej miejsce stosuje się – odwołujące się do wariancji pojęcia – odchylenie standardowe lub odchylenie średnie $\sigma[X]$ równe:

$$\sigma[X] = \sqrt{E[X - E[X]]^2} = \sqrt{V[X]} \rightarrow V[X] = \sigma[X]^2$$

Odchylenie standardowe to najczęściej stosowana miara rozrzutu wartości zmiennej losowej X wokół jej wartości średniej $E[X]$. Im większe jest odchylenie standardowe, tym większy jest rozrzut.



DZIAŁANIA NA ZMIENNYCH LOSOWYCH

ŁĄCZENIE ZMIENNYCH LOSOWYCH



Łączenie zmiennych losowych

Łączenie zmiennych losowych umożliwia tworzenie nowych rozkładów. Jeśli znamy wartości oczekiwane i odchylenia standardowe (wariancje) początkowych rozkładów, możemy użyć tych informacji do znalezienia wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego rozkładu wynikowego.

Możemy połączyć wartości oczekiwane bezpośrednio, ale nie możemy tego samego zrobić z odchyleniami standardowymi. Możemy jednak połączyć wariancje tak długo jak prawdziwe jest założenie, że zmienne te są niezależne od siebie.



Zmienna niezależna i zależna

Zmienną niezależną definiuje się jako zmienną, która jest zmieniana lub kontrolowana w eksperymencie naukowym. Reprezentuje przyczynę zdarzenia lub przyczynę wyniku pomiaru lub obliczeń.

Zmienne niezależne to zmienne, które eksperymentator zmienia, aby przetestować swoją zmienną zależną. Zmiana zmiennej niezależnej bezpośrednio powoduje zmianę zmiennej zależnej. Mierzony i rejestrowany jest wpływ na wartość zmiennej zależnej.

Podczas tworzenia wykresów danych dla eksperymentu zmienna niezależna jest wykreślana na osi x , a zmienna zależna na osi y .



Przekształcenia zmiennych losowych

W medycynie nuklearnej używa się takich przekształceń zmiennych losowych jak:

- ♦ **dodawania stałej do zmiennej,**
- ♦ **mnożenia zmiennej przez stałą,**
- ♦ **sumy (różnicy) dwóch zmiennych.**



Przekształcenia zmiennych losowych

Dodawanie stałej do zmiennej

Jeżeli do zmiennej X dodamy stałą a , to wartość oczekiwana nowej zmiennej Y odpowiednio się przesunie, a wariancja pozostanie bez zmian:

$$Y = X + a$$



$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X] + a \\ V[Y] &= V[X] \end{aligned}$$

Odchylenie standardowe σ_T zmiennej T jest równe:

$$\sigma_T^2 = \sigma_X^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_T = \sigma_X$$



Przekształcenia zmiennych losowych

Mnożenie zmiennej przez stałą

Jeżeli zmienną X przemnożymy przez stałą k , to wartość oczekiwana nowej zmiennej Y będzie k razy większa, wariancja będzie k^2 razy większa (odchylenie standardowe będzie k razy większe).

$$Y = k \cdot X$$



$$E[Y] = k \cdot E[X]$$

$$V[Y] = k^2 \cdot V[X]$$

Odchylenie standardowe σ_T zmiennej T jest równe:

$$\sigma_T^2 = k^2 \cdot \sigma_X^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_T = k \cdot \sigma_X$$



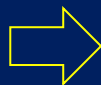
Przekształcenia zmiennych losowych

Suma lub różnica dwóch zmiennych

Jeżeli mamy dwie zmienne losowe X i Y , to wartość oczekiwana zmiennej T będącej ich sumą lub różnicą będzie równa sumie lub różnicy ich wartości oczekiwanych.

$$T = X + Y$$

$$T = X - Y$$



$$E[T] = E[X] + E[Y]$$

$$E[T] = E[X] - E[Y]$$

nawet gdy X i Y są zależne.



Przekształcenia zmiennych losowych

Wariancja zmiennej T będącej sumą X i Y jest równa sumie ich wariancji. Wariancja różnicy zmiennych X i Y jest także równa SUMIE (NIE: RÓŻNICY!) ich wariancji.

$$T = X + Y$$

$$T = X - Y$$



$$V[T] = V[X] + V[Y]$$

$$V[T] = V[X] + V[Y]$$

tylko gdy X i Y są niezależne.

Odchylenie standardowe σ_T zmiennej T jest równe:

$$\sigma_T^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$$



Przekształcenia zmiennych losowych

Sumowanie wariancji zmiennych losowych zarówno podczas ich dodawania jak i odejmowania jest swoistą „pułapką” podczas wykonywania obliczeń wartości parametrów opisujących procesy fizjologiczne.

Diagnosta powinien pamiętać, że bardzo często intuicyjne stosowanie w medycynie nuklearnej tzw. „odejmowania tła”, zawsze powoduje zwiększenie odchylenia standardowego wyniku tej operacji. Praktycznie powoduje zwiększenie niepewności wyniku obliczeń !!!



MINIMUM WIEDZY O STATYSTYCE

Koniec tematu

Kompilacja - adam.bajera@euromail.pl