



Polskie Towarzystwo Medycyny Nuklearnej

POMIARY I ICH DOKŁADNOŚĆ

dr n. tech. Adam Bajera
Członek honorowy PTMN



TREŚĆ

KILKA SŁÓW O POMIARACH

PRZYCZYNY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

PRZYKŁADY OSZACOWANIA NIEPEWNOŚCI

Oszacowanie niepewności pomiarów jednokrotnych
– Oszacowanie niepewności pomiarów wielokrotnych

SPOSÓB ZAPISU I RODZAJE NIEPEWNOŚCI

Niepewność bezwzględna – Niepewność względna

POZIOM I PRZEDZIAŁ UFNOŚCI

Niepewność bezwzględna – Niepewność względna



Kilka słów o pomiarach

Czynność określana mianem pomiaru jest wszechobecna w działalności człowieka. Począwszy od weryfikacji teorii o różnym zasięgu, od mikroświata do kosmosu, poprzez techniki i technologie wytwarzania dowolnych przedmiotów lub procesów, aż do naszej orientacji w czasie i przestrzeni. Wszystkie pomiary, jakkolwiek staranne i naukowe, są narażone na występowanie różnych niepewności ich wyników.

Wszystkie pomiary, jakkolwiek staranne i naukowe, są narażone na występowanie różnych niepewności ich wyników.



Kilka słów o pomiarach

W roku 1995 z inicjatywy Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM) zostały określone międzynarodowe normy opisujące niepewności pomiarowe. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) wydała „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement”, który stanowi wspólne dzieło uzgodnień dokonanych przez siedem ważnych międzynarodowych organizacji. Zgodnie z umowami międzynarodowymi Polska zobowiązała się do zastosowania normy ISO dotyczącej obliczania i zapisu niepewności pomiarów, podobnie do obowiązku stosowania jednostek układu SI.



Kilka słów o pomiarach

Jednym z podstawowych terminów nowej normy jest termin „niepewność” (ang. *uncertainty*). W języku potocznym słowo „niepewność” oznacza wątpliwość, a stąd „niepewność pomiaru” oznacza wątpliwość, co do wartości wyniku pomiaru. Należy jednak podkreślić, że „niepewność” jest zawsze liczbą!

Podstawowe definicje to pomiar i niepewność pomiaru.

Pomiarem nazwano zbiór czynności prowadzących do ustalenia wartości wielkości mierzonej.

Niepewnością pomiaru (*uncertainty*) nazwano parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej.



Kilka słów o pomiarach

Obowiązująca norma wprowadza rozróżnienie między „niepewnością pomiarów” a „błędami” w potocznym tego słownictwie oraz przyjmuje jednolitą terminologię i metody określania niepewności pomiaru. Dotychczas słowo „błąd” miało dwa znaczenia, jako nazwa dla faktu, że wynik pomiaru jest różny od wartości „prawdziwej”, czyli oczekiwanej, która jest nieznana, oraz jako liczbowa miara tego błędu.

Pozostawiono i określono dwa znaczenia słowa „błąd”:

- ilościowe, jako różnica (również nieznana) między wartością zmierzoną i prawdziwą,**
- jakościowe, używane w terminach takich jak błąd systematyczny, przypadkowy i grubość.**



Kilka słów o pomiarach

Na potrzeby prezentacji, dla uzyskania większej spójności i prostoty, termin „błąd” będzie używany tylko dla określenia zjawiska prowadzącego do uzyskania wartości wielkości mierzonej różniącą się znacznie od innych wyników pomiarów tej wielkości. Takie wyniki pomiarów nazywane są „błędami grubymi” i nie są brane przy określaniu niepewności pomiarów.



PRZYCZYNY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW

PRZYCZYNY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW



Przyczyny niepewności pomiarów

Niepewność pomiaru ma wiele przyczyn. Do najważniejszych zaliczamy:

- ⇒ **niepełną definicję wielkości mierzonej (określenie danej wielkości fizycznej jest tymczasowe w tym sensie, że może ulec zmianie wraz z rozwojem nauki)**
- ⇒ **niedokładną realizację tej definicji wielkości fizycznej, np. temperaturę określamy jako część temperatury punktu potrójnego wody, ale nie istnieje idealnie czysta woda, pozbawiona jakichkolwiek domieszek; podobnie wzorzec czasu jest ściśle związany z prędkością światła, więc dokładność pomiaru prędkości światła wpłynie zapewne na wzorzec czasu)**



Przyczyny niepewności pomiarów

- ⇒ **niereprezentatywność serii wyników pomiarów (np. zbyt mała liczba pomiarów),**
- ⇒ **niedokładną znajomość czynników zewnętrznych (np. wpływu otoczenia na przebieg pomiarów) lub ich niedokładny pomiar,**
- ⇒ **błędy obserwatora podczas odczytów wskazań przyrządów analogowych,**
- ⇒ **skończoną zdolność rozdzielczą stosowanych w pomiarach przyrządów,**



Przyczyny niepewności pomiarów

- ⇒ **niedokładność stosowanych wzorców i materiałów odniesienia,**
- ⇒ **niedokładne wartości stałych lub parametrów pochodzących z innych źródeł,**
- ⇒ **przybliżenia i założenia upraszczające przyjęte w pomiarach lub procedurze pomiarowej,**
- ⇒ **zmiany kolejnych wyników pomiarów wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach (np. temperaturze lub ciśnieniu).**



PRZYKŁADY OSZACOWANIA NIEPEWNOŚCI

PRZYKŁADY OSZACOWANIA NIEPEWNOŚCI

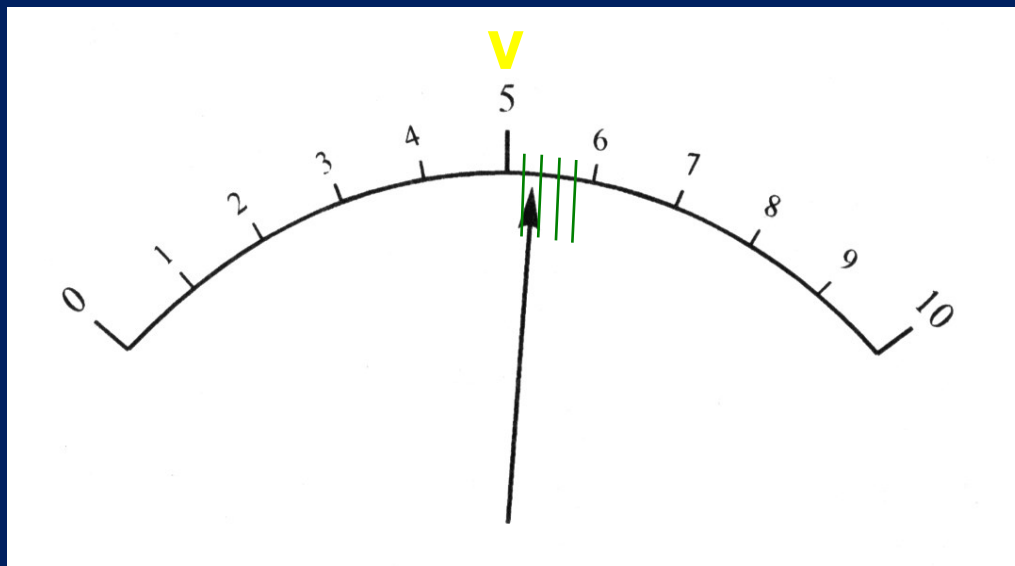


Oszacowanie niepewności pomiarów jednokrotnych



Pomiar jednokrotny

Aby zmierzyć napięcie na przedstawionej skali, musimy zdecydować, który punkt na skali wiarygodnego woltomierza pokazuje jego wskazówka.



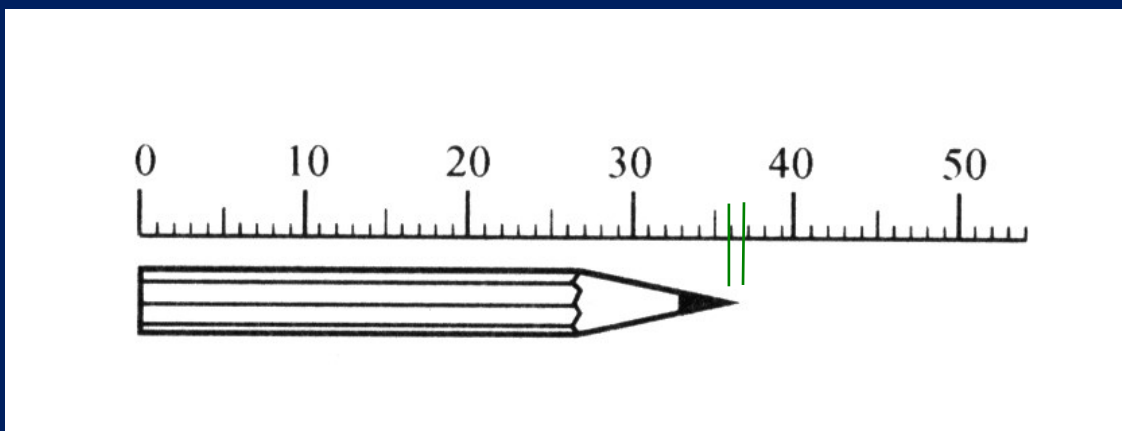
Rozsądne podsumowanie wyniku pomiaru napięcia:

- prawdopodobny zakres od 5.2 do 5.4V
- najlepsze oszacowanie napięcia = 5.3V



Pomiar jednokrotny

Aby zmierzyć długość na przedstawionej skali linijki, musimy zdecydować, jaki punkt na skali wiarygodnej linijki pokazuje koniec ołówka.



Rozsądne podsumowanie wyniku pomiaru długości:

- prawdopodobny zakres od 36.0 do 37.0mm
- najlepsze oszacowanie = 36.5mm



Oszacowanie niepewności pomiarów wielokrotnych



Pomiar wielokrotny

Wiele pomiarów obarczonych jest niepewnością, którą o wiele trudniej ocenić niż tę związaną z podziałką skali pomiarowej.

Kiedy, na przykład, używamy stopera do pomiaru czasu, głównym źródłem niepewności nie jest trudność w określeniu położenia wskazówki, ale raczej nieznaną czas naszej reakcji na początek i koniec pomiaru. Błędy takiego rodzaju mogą być czasem wiarygodnie ocenione, jeśli pomiar można powtarzać wiele razy, lub pomiaru dokonuje wiele osób.



Pomiar wielokrotny

Przypuśćmy na przykład, że dokonaliśmy pojedynczego pomiaru okresu długiego wahadła i otrzymaliśmy rezultat 2.3sek. Po jednym pomiarze nie potrafimy powiedzieć zbyt wiele o niepewności pomiaru. Jeśli jednak powtórzyliśmy pomiar i otrzymaliśmy wynik 2.4sek, możemy natychmiast stwierdzić, że błąd pomiarowy jest prawdopodobnie rzędu 0.1sek.

Jeśli sekwencja czterech takich pomiarów daje rezultaty:

2.3sek 2.4sek 2.5sek 2.4sek

możemy zacząć wykonywać pewne zupełnie sensowne oszacowania.



Pomiar wielokrotny

Po pierwsze, naturalne jest założenie, że najlepszym przybliżeniem okresu jest wartość średnia, 2.4sek. Po wtóre, całkiem bezpieczne wydaje się przyjęcie, że właściwy okres mieści się gdzieś pomiędzy wartością najmniejszą 2.3 oraz największą 2.5

W ten sposób możemy stwierdzić, że:

- prawdopodobny zakres od 2.3 do 2.5sek
- najlepsze oszacowanie = 2.4sek

Ileokroć możemy wielokrotnie powtórzyć ten sam pomiar, tylekroć rozrzut otrzymanych wyników daje cenną wskazówkę na temat jego niepewności pomiarowej.



Pomiar wielokrotny

Statystyczne metody obróbki takich wielokrotnych pomiarów, w odpowiednich warunkach, dają bardziej dokładne oszacowanie ich niepewności niż to, które określiliśmy posługując się jedynie zdrowym rozsądkiem.

Wielokrotne pomiary nie zawsze ujawniają niepewność wyniku pomiaru nawet wówczas, gdy możemy być pewni, że za każdym razem mierzymy tę samą wielkość.

Przypuśćmy na przykład, że zegar, który dał wynik (2.3sek), spieszył się stale 5%. Wówczas wszystkie czasy zmierzone za jego pomocą będą o 5% za długie i dowolna liczba powtórzeń tego pomiaru (tym samym stoperem) nie ujawni tego faktu.



SPOSÓB ZAPISU I RODZAJE NIEPEWNOŚCI

SPOSÓB ZAPISU I RODZAJE NIEPEWNOŚCI



Najlepsze przybliżenie i niepewność

Przykłady pokazują, że właściwym sposobem prezentacji wyników doświadczeń jest podawanie tzw. najlepszego przybliżenia wielkości mierzonej oraz zakresu, w którym owa wielkość leży. Np. wynik pomiaru czasu, o którym była mowa, wyglądał następująco: najlepsze przybliżenie czasu = 2.4s, prawdopodobny zakres od 2.3 do 2.5s.

W tym przypadku najlepsze przybliżenie, 2.4s, leży pośrodku szacowanego zakresu wartości prawdopodobnych od 2.3s do 2.5s.



Najlepsze przybliżenie i niepewność

Przykłady pokazują, że właściwym sposobem prezentacji wyników doświadczeń jest podawanie tzw. najlepszego przybliżenia wielkości mierzonej oraz zakresu, w którym owa wielkość leży. Np. wynik pomiaru czasu, o którym była mowa, wyglądał następująco: najlepsze przybliżenie czasu = 2.4s, prawdopodobny zakres od 2.3 do 2.5s.

Fakt ten wydaje się całkiem naturalny i odnosi się do prawie wszystkich pomiarów. Umożliwia on wyrażanie wyników pomiarowych w bardzo zwartej formie. Zwykle zapisywany jest następująco: mierzona wartość czasu = $2.4 \pm 0.1s$.

Są jednak powody dla których lepiej jest stosować dwa rodzaje niepewności: bezwzględną i względną.



Niepewność bezwzględna (NB)

W ogólności wynik jakiegokolwiek pomiaru wielkości x podawany jest w następujący sposób:

$$x = x_{np} \pm \Delta x$$

Stwierdzenie to oznacza, po pierwsze, że najlepszym przybliżeniem wartości mierzonej jest według eksperymentatora liczba x_{np} , i po wtóre, że z rozsądnym prawdopodobieństwem szukana wielkość znajduje się gdzieś pomiędzy $x_{np} - \Delta x$ i $x_{np} + \Delta x$. Liczba Δx zwana jest niepewnością wyniku pomiaru x . Wygodnie jest zawsze definiować Δx jako wielkość dodatnią, tak aby $x_{np} + \Delta x$ było zawsze największą prawdopodobną wartością wielkości mierzonej, a $x_{np} - \Delta x$ było jej wartością najmniejszą.



Niepewność względna (NW)

Niepewność Δx w wyniku pomiaru, wskazuje na wiarygodność lub dokładność pomiaru. Jednak niepewność ta sama w sobie nie mówi eksperymentatorowi wszystkiego !!!

Niepewność jednego centymetra, na przykład, na dystansie jednego kilometra sugeruje niezwykle precyzyjny pomiar, podczas gdy niepewność jednego centymetra na odległości trzech centymetrów wskazywałaby na bardzo grube przybliżenie !!!

Jest więc jasne, że o dokładności wyniku pomiaru pomiaru nie decyduje sama tylko niepewność Δx , ale także stosunek do jej najlepszego przybliżenia x_{np} .



Niepewność względna (NW)

Fakt ten prowadzi to do konieczności stosowania pojęcia niepewności względnej, zwane także dokładnością:

$$NW(x) = \frac{\Delta x}{|x_{np}|}$$

W większości poważnych eksperymentów niepewność Δx jest dużo mniejsza niż najlepsze przybliżenie zmierzonej wartości x_{np} . Ponieważ niepewność względna $NW(x)$ jest zwykle małą liczbą, więc często jest wygodnie pomnożyć ją przez 100 i wyrazić jako niepewność procentową.



Niepewność względna (NW)

Na przykład pomiar: długość $l = 50 \pm 1 \text{ cm}$ ma niepewność względną procentową

$$NW(l) = \frac{\Delta l}{l_{np}} = \frac{1}{50} = 0.02 = 2\%$$

Tak więc przykładowy wynik mógłby być przedstawiony w postaci: długość $l = 50 \text{ cm} \pm 2\%$

Zauważmy, że o ile niepewność bezwzględna ma takie same jednostki jak mierzona wielkość, to niepewność względna jest wielkością niemianowaną i nie ma żadnych jednostek.

Zapamiętanie tej różnicy pomoże uniknąć powszechnego mylenia niepewności względnej z niepewnością bezwzględną.

Niepewność względna (NW)

W przypadku wielu trudnych do zmierzenia wielkości, niepewność 10% byłaby traktowana jako duży eksperymentalny sukces. Tak więc duża niepewność procentowa nie znaczy, że pomiar jest bezwartościowy z naukowego punktu widzenia. W rzeczywistości wiele istotnych pomiarów w historii fizyki było obarczonych niepewnościami rzędu 10% lub większymi.





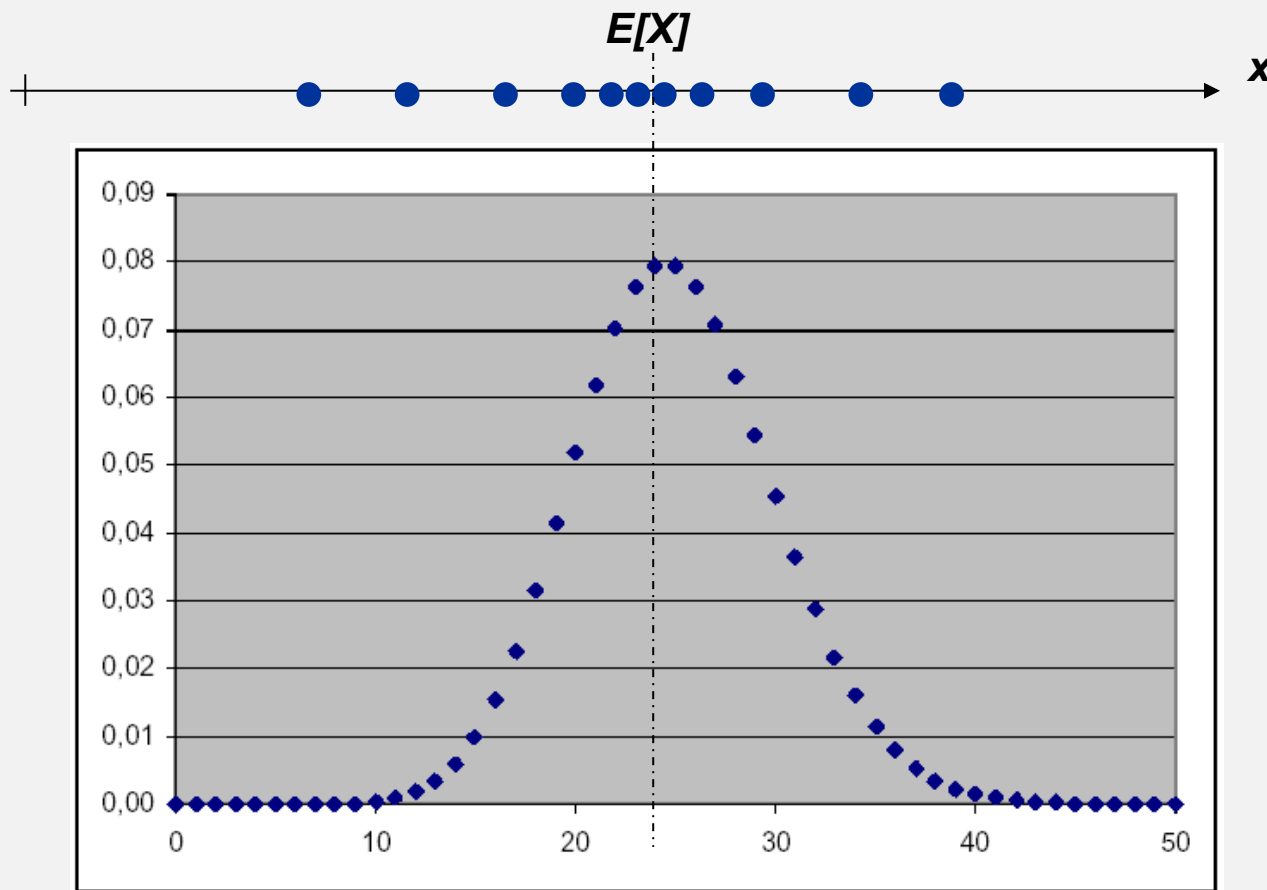
NIEPEWNOŚĆ WYNIKÓW POMIARÓW

POZIOM I PRZEDZIAŁ UFNOŚCI



Ilustracja niepewności wyniku pomiaru

Kolejne wyniki pomiaru skupiają się wokół wartości $E[X]$





Poziom i przedział ufności

W medycynie nuklearnej sama wielkość mierzona – aktywność rozpadu promieniotwórczego – jest procesem losowym. Gdyby nawet było możliwe powtarzanie pomiaru, to wyniki kolejnych pomiarów aktywności będą się różnić ze względu na fluktuacje liczby rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu wynikające z natury procesu przemian jądrowych. W efekcie potrafimy obliczyć jedynie najlepsze przybliżenie wartości aktywności A_{np} , a nie jej teoretyczną wartość oczekiwaną $E[A]$.

Swoisty paradoks użycia narzędzi statystyki polega na tym, że do opisu zdarzeń używamy teoretycznych parametrów zbioru danych (wartość oczekiwana, wariancja). W RZECZYWISTOŚCI NIGDY ICH NIE POZNAMY!!!



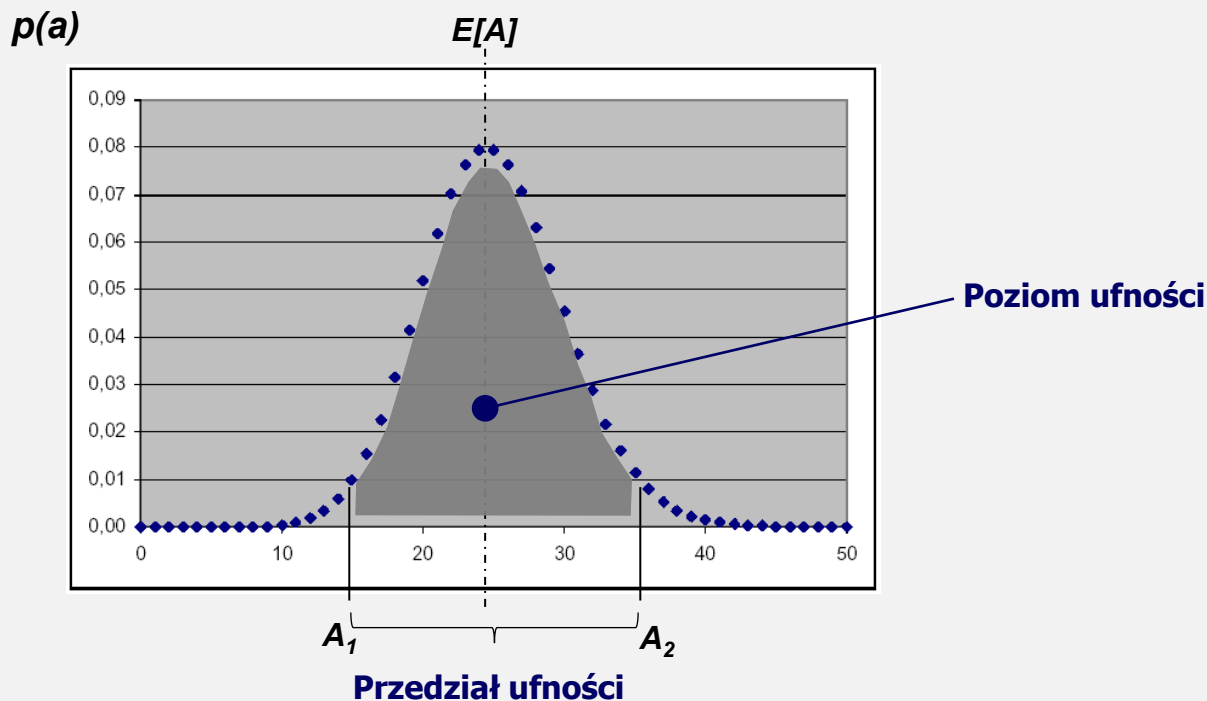
Konstrukcja przedziału ufności

Przedział ufności to rodzaj oszacowania obliczanego na podstawie rzeczywistych wyników pomiarów. Pozwala na określenie zakresu wartości, który uważa się za zawierający prawdziwą wartość oczekiwaną $E[A]$.

Przedział ufności budujemy, mając na uwadze tzw. poziom ufności – zazwyczaj 95% lub 99% – co oznacza, że jeśli te same pomiary będą wykonywane wielokrotnie to wartość oczekiwana $E[A]$ będzie znajdowała się w tych przedziałach odpowiednio w 95% lub 99% przypadków.



Poziom i przedział ufności

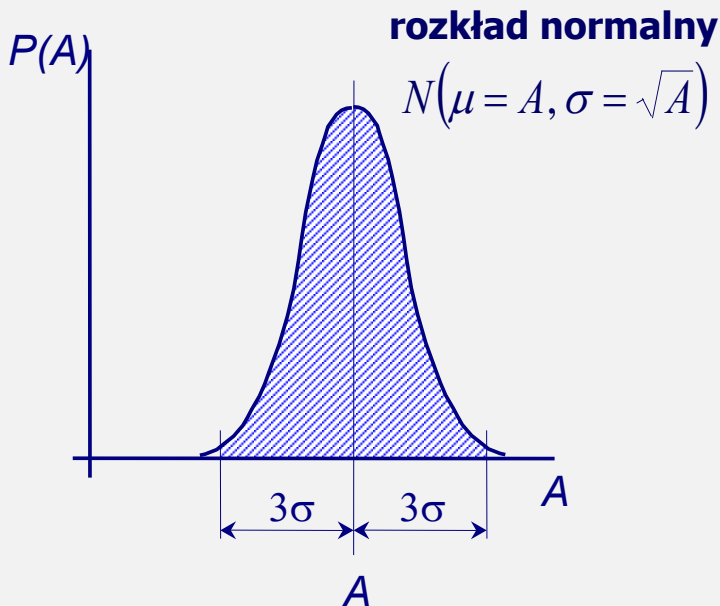


Poziom ufności jest prawdopodobieństwem, że wynik kolejnego pomiaru znajdzie się w przedziale ufności $[A_1, A_2]$:

$$\int_{A_1}^{A_2} p(a) \cdot da \quad , \text{ czyli powierzchnia pod krzywą.}$$



Przykład poziomu i przedziału ufności w pomiarach aktywności



Np. w PRZEDZIALE ufności:

$$6 \cdot \sigma = 6 \cdot \sqrt{A}$$

co odpowiada granicom

$$A_{\min} = A - 3 \cdot \sqrt{A}, \quad A_{\max} = A + 3 \cdot \sqrt{A}$$

POZIOM ufności jest równy:

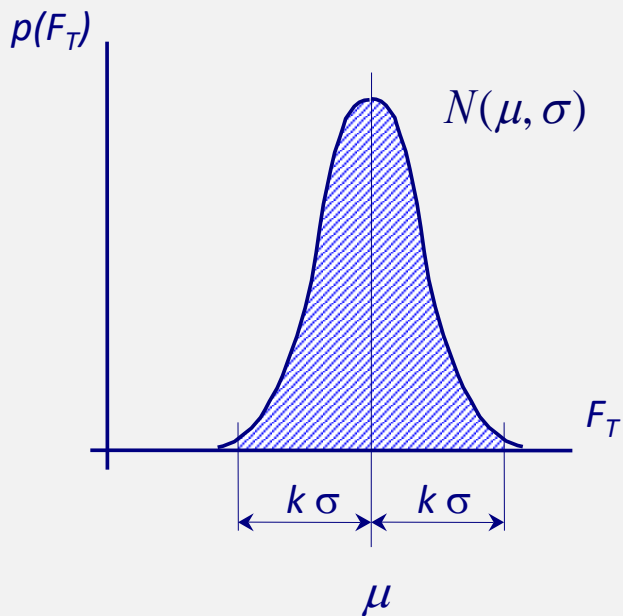
$$P(A_{\min} \leq k \leq A_{\max}) = 99.73\%$$

Niepewność względna w tym przedziale jest równa:

$$NW = \pm \frac{3 \cdot \sigma}{A} = \pm \frac{3 \cdot \sqrt{A}}{A}$$



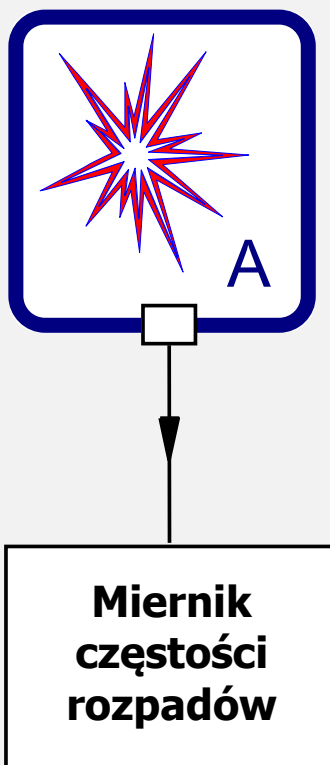
Tabela poziomów i przedziałów ufności rozkładu normalnego



Przedział ufności	Poziom ufności
$\mu \pm k \cdot \sigma$	%
$\mu \pm 0.674 \cdot \sigma$	50.00
$\mu \pm 1.00 \cdot \sigma$	68.26
$\mu \pm 1.96 \cdot \sigma$	95.00
$\mu \pm 2.00 \cdot \sigma$	95.44
$\mu \pm 2.58 \cdot \sigma$	99.00
$\mu \pm 3.00 \cdot \sigma$	99.73
$\mu \pm 3.29 \cdot \sigma$	99.90



Przykładowe wyniki pomiarów aktywności rozpadów



A	ΔA	A_{\min}	A_{\max}	$\Delta A / A$
1		0	5	
10		2	20	
30	16	14	46	55%
100	30	70	130	30%
300	52	248	352	17%
1000	95	905	1095	9,5%
3000	164	2836	3164	5,5%
10000	300	9700	10300	3,0%
30000	520	29480	30520	1,7%
100000	949	99051	100949	0,9%
300000	1643	298357	301643	0,5%
1000000	3000	997000	1003000	0,3%



POMIARY I ICH DOKŁADNOŚĆ

Koniec tematu

Kompilacja - adam.bajera@euromail.pl